

Stima & Identificazione

Compito dell'11 Giugno 2010, ore 9:00, Aula 1, Edificio di Santa Marta

Problema 1 - Si consideri il segnale y_t generato dal seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} x_{t+1,1} = 2 x_{t,2} \\ x_{t+1,2} = \frac{1}{3} x_{t,1} + w_t \\ y_t = x_{t,1} + v_t \\ w_t \sim wn(0, 1) \\ v_t \sim wn(0, 18) \end{cases}$$

con w_t e v_t incorrelati.

(a) Si dica, giustificando la risposta, se y_t è stazionario.

(b) Determinare una rappresentazione ARMA di y_t .

(c) Determinare una rappresentazione (modello) alle innovazioni di y_t evidenziandone i legami con il modello ARMA precedentemente determinato.

(d) Determinare la varianza $R_y(0)$ del segnale y_t , la sua funzione di auto-correlazione $\rho_y(k)$, il suo spettro $\Phi_y(z)$, la sua densità spettrale $\varphi_y(\omega)$ e la sua fattorizzazione spettrale canonica $(\sigma_e^2, H(z))$.

(e) Determinare le equazioni di stato e le equazioni ingresso-uscita degli stimatori ottimi a minimo errore quadratico medio, che forniscono rispettivamente $\hat{s}_{t|t}$, cioè la stima di $s_t \triangleq x_{t,1}$ basata su y^t (filtraggio), $\hat{y}_{t+1|t}$ (predizione ad 1 passo), $\hat{y}_{t+2|t}$ (predizione a 2 passi).

(f) Calcolare e confrontare fra loro le varianze delle stime $\hat{s}_{t|t}$, $\hat{y}_{t+1|t}$ e $\hat{y}_{t+2|t}$ precedentemente determinate.

(g) Progettare un osservatore deadbeat per lo stato del sistema dinamico e confrontare la varianza asintotica della stima dello stato fornita dall'osservatore deadbeat con quella del predittore di Kalman stazionario. Quali sono gli autovalori di $A - KC$ nei casi di osservatore deadbeat e di predittore stazionario di Kalman?

Suggerimento: Il candidato è invitato a seguire la strada che ritiene più opportuna nello svolgimento dei vari punti, indicando (se lo desidera) eventuali strade alternative che verranno considerate come valore aggiunto.

Problema 2 - Si vogliono stimare i parametri reali $c \neq 0$ e a della funzione reale $f(x) = ce^{ax}$ assumendo di disporre di N misure y_i della funzione in punti distinti $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_N$

$$y_i = f(x_i) e_i$$

affette da errori di misura moltiplicativi e_i , indipendenti fra loro e tali che $v_i \triangleq \ln(e_i)$ hanno media nulla e varianza σ_v^2 . Assumendo che non sia disponibile su a e c alcuna informazione a priori, impostare il problema di stima di tali parametri cercando se possibile una formulazione sotto forma di stima lineare.

Problema 3 - Dato un processo ARMA y_t definito da

$$y_t + a_1 y_{t-1} + \cdots + a_n y_{t-n} = e_t + c_1 e_{t-1} + \cdots + c_n e_{t-n}$$

si discuta come si può procedere al calcolo della sua funzione di auto-covarianza $R_y(k) \triangleq E[y_{t+k} y_t]$, in alternativa al metodo di Yule-Walker, utilizzando una realizzazione di stato di y_t

$$\begin{cases} x_{t+1} &= Ax_t + De_t \\ y_t &= Cx_t + e_t \end{cases}$$

e l'equazione algebrica di Lyapunov.

Suggerimento: Si tenga presente che $y_{t+k} = CA^k x_t + e_{t+k} + CD e_{t+k-1} + \cdots + CA^{k-1} D e_t$.